2. cvičení - teorie

Značení. Namísto $x \in \mathbb{R}^n \colon V(x)$, kde $V(x)$ je nějaká vlastnost pro bod $x \in \mathbb{R}^n$, budeme psát $[V(x)]$.

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \rho(x,y) < r\} = [\rho(x,y) < r]$, kde ρ je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^n$.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$.
Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *vnitřním bodem* množiny M, pokud

$$\exists r > 0 \colon B(\boldsymbol{x}, r) \subset M.$$

Množina M je *otevřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem. *Vnitřek* množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M, značíme ji $\operatorname{Int} M$ (interior).
Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je *hraniční bod* množiny M, pokud

$$\forall r > 0 \colon B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

(Body, které jsou uvnitř množiny M splňují první podmínku automaticky a druhou podmínku ihned splňují body mimo množinu M.)
Hranice množiny M je množina všech jejích hraničních bodů, značíme ji $H(M)$. *Uzávěr* množiny M je množina $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$.
Množina M je *uzavřená* (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $H(M) \subset M$ (respektive, pokud $\overline{M} = M$).

Věta 4 (Charakterizace uzavřených množin)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$. Pak je ekvivalentní:

(a) Množina M je uzavřená.

(b) Množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená.

(c) Pokud posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_n \subset M$ konverguje k $\boldsymbol{x}$, pak $\boldsymbol{x} \in M$.

Věta 2 (vlastnosti otevřených množin)**.**

(i) Prázdná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.

(iii) Konečný průnik otevřených množin je otevřená množina.

Věta 5 (vlastnosti uzavřených množin)**.**

(i) Prázdná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Libovolný průnik uzavřených množin je uzavřená množina.

(iii) Konečné sjednocení uzavřených množin je uzavřená množina.

Věta 6. Nechţ $M \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(i) Množina $\overline{M}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Množina $\operatorname{Int} M$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(iii) Množina M je otevřená v $\mathbb{R}^n$, právě když $M = \operatorname{Int} M$.

Množina $\operatorname{Int} M$ je největší otevřená množina obsažená v M (tj.je-li G množina otevřená v $\mathbb{R}^n$ t. ž. $G \subset M$, pak $G \subset \operatorname{Int} M$). Podobně M je nejmenší uzavřená množina obsahující M.

Věta 8 (Operace se spojitými funkcemi)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}^n, x \in M, f\colon M \to \mathbb{R}, g : M \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Jestliže f a g jsou spojité v bodě x vzhledem k M, potom také funkce $c \cdot f, f + g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v x vzhledem k M. Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x, pak je spojitá i funkce $\frac{f}{g}$ v bodě x vzhledem k M.

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(i) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) < c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(ii) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) > c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(iii) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \leq c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(iv) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \geq c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(v) Množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka. Je-li $M = [f \geq c]$, pak $[f = c]$ je zpravidla hranicí množiny M. Žádnou takovou větu jste však na přednášce neměli, proto je potřeba to v daném případě dokázat z definice.

Fakt. Buď $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$. Potom platí:

(a) Množina Int M je otevřená, Int $M \subset M$ a $\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Int} N$.

(b) Množina $\overline{M}$ je uzavřená, $M \subset \overline{M}$ a $\overline{M} \subset \overline{N}$.

(c) $H(M) = H(\mathbb{R}^n \setminus M)$.

(d) $H(M) \cap \operatorname{Int} M = \emptyset$.

(e) $\mathbb{R}^n = \operatorname{Int} M \cup H(M) \cup \operatorname{Int}(\mathbb{R}^n \setminus M)$.

(f) Množina M je otevřená právě tehdy, když $M = \operatorname{Int} M$.

(g) Množina M je uzavřená právě tehdy, když $M = \overline{M}$.

Návod (vizte vzorově vyřešený příklad 2 (f))

- Převést to na větu 11 - vyjádřit množinu M např. jako $[f > c]$ pro spojitou f apod.
- Využít věty 2 a 5 (průniky a sjednocení ot. a uz. množin).
- Určit hranici - obvykle je hranicí něco jako $[f = c]$.
- Pokud $H(M) \subset M$, pak je M uzavřená, pokud $H(M) \cap M = \emptyset$, pak je M otevřená. Jinak M není ani jedno.

Určení hranice

- Z definice
- Je-li $M = [f < c]$, pak je $[f = c]$ hranice. To se ukáže takto: zvolím $[x, y] \in [f = c]$ a $r > 0$ libovolně. Pak uvažuji $\delta \in (0, r)$ a ukážu, že $[x, y + \delta] \in M$ a $[x, y - \delta] \notin M$, nebo naopak. (případně pracuji s $[x \pm \delta, y]$). Tím dokážu, že $[f = c] \subset H(M)$. Potřebuji ještě ukázat, že ostatní body nejsou hraničními. Dále vím, že $[f > c]$ je ot. mn. Proto, pro $[x, y] \in [f > c]$ existuje $r > 0$ t.ž. $B([x, y], r) \subset [f > c]$, tedy $[x, y]$ nemůže být hraničním bodem.